CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNÉE 1988

PREMIERE EPREUVE A OPTION **MATHEMATIQUES**

(Durée : 3 h 00 - Coefficient : 9) **M - P**

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4, rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$. A tout couple de réels (a,b), on associe la matrice M (a,b) :

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{bmatrix}$$ et le polynôme $P_{a,b}(x) = a + bx$.

Soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de E associé dans la base $\mathcal{B}$ à la matrice M(a,b).

1°) a) La matrice M(a,b) est-elle diagonalisable ?

b) Déterminer les valeurs propres de $f_{a,b}$, et en donner une base propre orthonormée.

c) Déterminer une matrice P de type (4,4) qui soit à la fois orthogonale et symétrique, et telle que P^{-1} . M(a,b) . P soit diagonale. Préciser P^{-1} et la matrice diagonale ainsi obtenue.

d) Donner la valeur du déterminant de la matrice M(a,b) .

2°) On suppose dans cette partie M(a,b) inversible.

a) Soit $\vec{v}$ un vecteur donné, de composantes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer un vecteur $\vec{x}$ de composantes inconnues (x,y,z,t) dans la base $\mathcal{B}$, et tel que $f_{a,b}(\vec{x}) = \vec{v}$.

b) Donner l'expression de la matrice inverse de M(a,b), puis celle de sa comatrice (c'est à dire de la matrice qui a pour coefficients les cofacteurs des éléments de M(a,b) dans l'expression de dét M(a,b)).

3°) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices M(a,b) quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable pour le produit, et déterminer (A,B) dans $\mathbb{R}^2$ tels que M(a,b) . M(a',b') = M(A,B).

b) En déduire que le polynôme $P_{A,B}(x)$ est le reste dans la division euclidienne de :

$$P_{a,b}(x) \cdot P_{a',b'}(x) \text{ par } x^2 - 1$$

c) Calculer le reste dans la division euclidienne de $\left[P_{a,b}(x)\right]^n$ par $x^2 - 1$.
En déduire l'expression de $\left[M(a,b)\right]^n$.

d) Quel est le rang de M(a,b) lorsque cette matrice n'est pas inversible ? Déterminer dans ce cas les couples de réels (a',b') tels que M(a,b) . M(a',b') = 0

4°) Soit Φ la forme quadratique associée, dans la base $\mathcal{B}$, à la matrice M(a,b).

a) Donner l'expression développée de $\Phi(\vec{x})$ en fonction des composantes (x,y,z,t) du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. On note également $\Phi(x,y,z,t)$ cette expression.

b) Donner une réduction en carrés, dans une base orthonormale, de $\Phi(\vec{x})$.

c) On suppose maintenant t = 1 . Soit m le point d'un espace affine euclidien de dimension 3, qui a pour coordonnées (x,y,z) dans un repère orthonormé, et soit Q l'ensemble des points m tels que $\Phi(x,y,z,1) = 0$.

c)1) Quelle est la nature de l'ensemble Q si a = 0 , b ≠ 0 ? Déterminer les 2 systèmes de génératrices.

c)2) On suppose a ≠ 0 . Montrer que le point C de coordonnées $(\frac{b^2}{a^2}, -\frac{b}{a}, -\frac{b}{a})$ est un centre de symétrie de Q , et trouver une équation cartésienne de Q lorsqu'on amène par translation l'origine du repère en C .

c)3) Discuter alors, selon les valeurs de a et b, la nature de l'ensemble Q . (On ne demande pas de préciser ses axes de symétrie).

c)4) L'ensemble Q peut-il être une surface de révolution ?

---==oOOo==---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail